MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME COMPOSITION

(Option générale)

DURÉE : 3 heures

La partie 1 comporte quatre questions indépendantes, dont les résultats sont utilisés dans certaines questions des parties 2, 3 et 4.

Les candidats n'ayant pas réussi à traiter l'une ou l'autre des questions de la partie 1 pourront néanmoins faire appel aux résultats qui y sont clairement énoncés.

PARTIE 1

1.1. Soit n un entier naturel et x et t deux réels. On définit :

$$\Phi = \frac{1}{2} + \cos(x-t) + \cos 2(x-t) + \ldots + \cos n(x-t)$$

Montrer que :

$$\Phi = \frac{\sin\left[(2n+1).\left(\frac{x-t}{2}\right)\right]}{2\sin\frac{x-t}{2}} \qquad \text{si : } x - t \not\equiv 0\ [2\pi]$$

$$\Phi = n + \frac{1}{2} \qquad \text{si : } x - t \equiv 0\ [2\pi].$$

1.2. a et b sont deux réels tels que $a < b$; soit f une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$.

Pour tout λ réel, on note $I_\lambda = \int_a^b f(t)\sin\lambda t\,dt$ et $J_\lambda = \int_a^b f(t)\cos\lambda t\,dt$.

En effectuant une intégration par parties, prouver que I_λ et J_λ ont pour limite 0 quand λ tend vers $+\infty$.

1.3. Soit f une application de R dans R, de classe C^2 et 2π-périodique.

Soit x un réel donné; on note par h la fonction définie sur R par :

$$(\forall t \in \mathbb{R})(t \not\equiv x\ [2\pi]) : \qquad h(t) = \frac{f(t) - f(x)}{2\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}$$

$$\forall k \in \mathbb{Z} \qquad h(x + 2k\pi) = (-1)^k f'(x).$$

Démontrer que h est une fonction de classe C^1 sur R.

1.4. a et b étant deux réels ($a < b$), on note $I = [a, b]$.

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que la série $\sum_{n\geq 0}\alpha_n$ soit convergente et que :

$$\forall x \in I \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |v_n(x)| \leqslant \alpha_n.$$

On admettra que : $\forall x \in I$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x)$ est une fonction continue sur I.

a. Démontrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\left|\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x)\right)dx - \sum_{p=0}^{n}\int_a^b v_p(x)\,dx\right| \leqslant (b-a)\sum_{p=n+1}^{+\infty}\alpha_p.$$

b. En déduire que :

$$\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x)\right)dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b v_n(x)\,dx.$$

PARTIE 2

2.1. Soit f la fonction réelle de la variable réelle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = |\sin^3 x|.$$

Étudier les variations de f. Tracer sa courbe représentative.

Démontrer que f est une fonction de classe C^2 sur R, mais pas de classe C^3.

2.2. Démontrer qu'il existe un couple de réels (A, B) tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin^3 x = A.\sin x + B.\sin 3x.$$

2.3. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin^3 t|\,.\cos(nt)\,dt \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin^3 t|\,.\sin(nt)\,dt.$$

a. Calculer b_n.

b. Calculer a_{2n+1}.

c. Exprimer a_{2n} en fonction de n.

Tournez la page S. V. P.

PARTIE 3

Soit f une fonction définie sur R à valeurs réelles, 2π-périodique et de classe C^2.

On note :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t).\cos(nt)\,dt$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t).\sin(nt)\,dt$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad u_0(x) = \frac{a_0(f)}{2}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n(x) = a_n(f).\cos(nx) + b_n(f).\sin(nx)$$

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad S_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_n(x).$$

3.1. En utilisant le résultat de la question (1.1), démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{\sin\left[(2n+1)\left(\frac{t-x}{2}\right)\right]}{2\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}\,dt.$$

3.2. x étant un réel donné et n un entier naturel, quelle est la valeur de :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\frac{\sin\left[(2n+1)\left(\frac{t-x}{2}\right)\right]}{2\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}\,dt\ ?$$

3.3. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t)\,.\,\sin\left[(2n+1)\left(\frac{t-x}{2}\right)\right]dt$$

h étant la fonction définie dans la question (1.3).

En utilisant le résultat de la question (1.2), démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = f(x).$$

PARTIE 4

On suppose toujours que f est définie sur R, de classe C^2 et 2π-périodique.

4.1. *a.* En effectuant des intégrations par parties, calculer $a_n(f)$ et $b_n(f)$ en fonction de $a_n(f'')$ et $b_n(f'')$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

b. En déduire qu'il existe un réel positif K tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ |a_n(f)| \leqslant \frac{K}{n^2} \quad \text{et} \quad |b_n(f)| \leqslant \frac{K}{n^2}.$$

c. Soit g une fonction définie et continue sur $[-\pi, \pi]$. En utilisant le résultat de la question (3.3), démontrer que :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,g(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} u_n(x).g(x)\,dx.$$

4.2. Démontrer, en utilisant le résultat de la question (4.1.*c*), que si f et g sont deux fonctions définies sur R, de classe C^2 et 2π-périodiques :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,g(x)\,dx = \frac{a_0(f)\,a_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n(f).a_n(g) + b_n(f).b_n(g)\Big).$$

4.3. Soit f et g les fonctions définies sur R par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) = |\sin^3 x|$.

a. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x\,dx$.

b. En déduire que :

$$\pi^2 = \frac{8}{5}\left[\frac{32}{9} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{576}{[(4n^2-9)(4n^2-1)]^2}\right].$$

----=o0o=----

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail